Solution 17 :

f est définie, continue et dérivable sur $]0,+\infty[$;

$$f'(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2x}=\frac{1}{2}(\frac{x^2-1}{x})$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x(\frac{x}{4}-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{4})=+\infty \text{ car } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$$

$$I(\lambda)=\int_\lambda^1(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\ln x)\,dx \int_\lambda^1(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4})\,dx-\frac{1}{2}\int_\lambda^1\ln x\,dx$$

- $\int_\lambda^1(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4})dx=\frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_\lambda^1=\frac{-\lambda^3}{12}+\frac{\lambda}{4}-\frac{1}{6}$

- Intégrons par parties : $\int_\lambda^1\ln x\,dx$.

Posons $\begin{cases}u'(x)=1\\ v(x)=\ln x\end{cases}$ et $\begin{cases}u(x)=x\\ v'(x)=\frac{1}{x}\end{cases}$

D'où

$$\int_\lambda^1\ln x\,dx=[x\ \ln x]_\lambda^1-\int_\lambda^1 1\,dx=-\lambda\ \ln\lambda-[x]_\lambda^1=-\lambda\ \ln\lambda-1+\lambda$$

Il en résulte que :

$$I(\lambda)=-\frac{\lambda^3}{12}+\frac{\lambda}{4}-\frac{1}{6}+\frac{\lambda}{2}\ln\lambda-\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}=-\frac{\lambda^3}{12}-\frac{\lambda}{4}+\frac{\lambda}{2}\ln\lambda+\frac{1}{3}$$

b) $\lim_{\lambda\to0^+} I(\lambda)=\frac{1}{3}$ car $\lim_{\lambda\to0^+}\lambda\ \ln\lambda=0$.

3°/a) f est décroissante sur $]0,1]$ et pour tout $1\le k\le n-1$ on a :

$[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]\subset]0,1]$ donc $\frac{k}{n}\le x\le\frac{k+1}{n}\Rightarrow f(\frac{k+1}{n})\le f(x)\le f(\frac{k}{n})$